Заключительный этап Всесибирской Открытой Олимпиады Школьников по физике
8 марта 2026 г.
11 класс

1. Лодка длиной $\boldsymbol{L}$ движется по реке с ускорением $\boldsymbol{a}$. На мосту высоты $\boldsymbol{H}$, расположенному перпендикулярно движению лодки, установили источник звука с частотой испускания $\boldsymbol{\nu_0}$. Капитан на носу замечает источник звука под углом $\boldsymbol{\alpha}$ к горизонту и регистрирует частоту $\boldsymbol{\nu_1}$. Спустя некоторое время матрос на корме, в этот момент находящийся там же где был капитан, замечает тот же источник под тем же углом, и регистрирует частоту $\boldsymbol{\nu_2}$. Найдите ускорение лодки. Скорость звука в воздухе равна $\boldsymbol{c}$.

Возможное решение:

Так как частота звука меняется, необходимо использовать эффект Доплера. В общем случае

$$\nu = \nu_0(1+\frac{u}{c})$$
$$u = V\cos\alpha$$

Тогда для каждой из зарегистрированных частот можем записать:

$$\frac{\nu_i}{\nu_0} - 1 = \frac{V_i\cos\alpha}{c}$$

где i=1,2

$$V_i = \frac{c}{\cos\alpha}\left(\frac{\nu_i - \nu_0}{\nu_0}\right)$$

Пользуясь формулам движения для равноускоренного движения получим:

$$a = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2L}$$

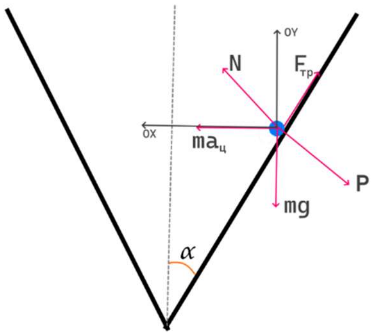
В итоге:

$$a = \frac{c^2}{2Lcos^2(\alpha)}(\left(\frac{\nu_2 - \nu_0}{\nu_0}\right)^2 - \left(\frac{\nu_1 - \nu_0}{\nu_0}\right)^2)$$

Критерий	Соотношение	Балл
Записан эффект Доплера в общем случае	$\nu = \nu_0(1+\frac{u}{c})$	1 балл
Соотношение для скорости с учетом угла	$u = V\cos\alpha$	1 балл
Записано выражение для скорости через частоту звука	$V_i = \frac{c}{\cos\alpha}\left(\frac{\nu_i - \nu_0}{\nu_0}\right)$	3 балла за каждый (всего 6)
Записано соотношение для определения ускорения	$a = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2L}$	1 балл
Получен конечный ответ	$a = \frac{c^2}{2Lcos^2(\alpha)}(\left(\frac{\nu_2 - \nu_0}{\nu_0}\right)^2 - \left(\frac{\nu_1 - \nu_0}{\nu_0}\right)^2)$	1 балл

2. Рассматривается вращающаяся механическая система, состоящая из перевёрнутого полого конуса, у которого угол при вершине составляет $2\boldsymbol{\alpha}$. Этот конус равномерно вращается вокруг своей вертикальной оси с заданной частотой $\boldsymbol{\nu}$. Внутри конуса, на его боковой поверхности, находится небольшая бусинка. Трение между бусинкой и поверхностью характеризуется коэффициентом $\boldsymbol{\mu}$. Считать, что бусинка движется без проскальзывания. Определите максимально возможную величину расстояния r от оси вращения, при котором бусинка ещё сохраняет неподвижность относительно вращающегося конуса. В решении должен присутствовать схематический рисунок с указанием всех сил, действующих на бусинку.

Возможное решение:



В предельном случае, когда бусинка находится на максимальном удалении от оси, сила трения направлена вверх/вниз вдоль образующей (<u>в зависимости от выбранной модели конуса</u>), препятствуя соскальзыванию.

1) Сделаем рисунок (рассмотрим случай малого угла α):

2) Бусинка движется по окружности радиуса r с угловой скоростью ω. Второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$\text{Ox}: N\cos\alpha \mp F_{\text{тр}}\sin\alpha = m\omega^2 r$$

$$Oy: N\sin\alpha \pm F_{\text{тр}}\cos\alpha - mg = 0$$

3) В момент, когда бусинка находится на грани проскальзывания

$$F_{\text{тр}} = \mu N$$

Подставим в уравнения:

$$N(\cos\alpha \mp \mu\sin\alpha) = m\omega^2 r$$

$$N(\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha) = mg.$$

4) Поделим первое уравнение на второе:

$$\frac{\cos\alpha \mp \mu\sin\alpha}{\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha} = \frac{\omega^2 r}{g}.$$

5) Выразим $r_{\max}$:

$$\boxed{r_{\max} = \frac{g}{\omega^2}\cdot\frac{\cos\alpha \mp \mu\sin\alpha}{\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha}}.$$

6) Найдем угловую скорость через частоту:

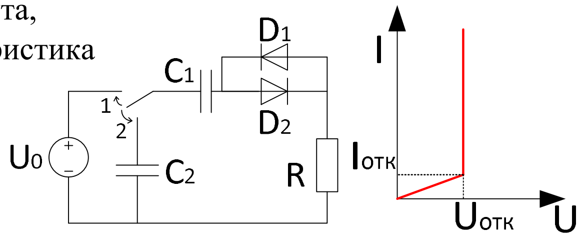
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Тогда:

$$\boxed{r_{\max} = \frac{g}{4\pi^2\nu^2}\cdot\frac{\cos\alpha \mp \mu\sin\alpha}{\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha}}.$$

Критерий	Соотношение	Балл
Сделан верный рисунок и применен к решению задачи		2 балла
Необходимые формулы для решения задачи	$F_{тр} = \mu N$ $\omega = 2\pi\nu$	1 балл
Записан второй закон Ньютона в проекции на оси	$N\cos\alpha \mp F_{тр}\sin\alpha = m\omega^2 r$ $N\sin\alpha \pm F_{тр}\cos\alpha - mg = 0$	2 балла
Найдена связь r от ω	$r_{\max} = \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\cos\alpha \mp \mu\sin\alpha}{\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha}$	3 балла
Найден $r_{\max}$	$r_{\max} = \frac{g}{4\pi^2\nu^2} \cdot \frac{\cos\alpha \mp \mu\sin\alpha}{\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha}$	2 балла

3. Цепь, изображенная на рисунке, изначально разомкнута, конденсаторы разряжены. Вольт – Амперная характеристика неидеальных диодов D_1 и D_2 также представлена на рисунке (***I**отк* и ***U**отк* – ток и напряжение открытия диодов соответственно). Сначала ключ замыкают в первое положение и ждут полной зарядки конденсатора. Затем, через достаточно долгий промежуток времени, ключ переключают во второе положение и также ждут установления равновесия. Найдите отношение теплоты, выделившейся на первом и втором диодах. Емкости, сопротивление и напряжение источника считать известными (см. рисунок). $U_0 \gg U_{отк}$



Возможное решение:

При напряжении на диоде ниже $U_{отк}$ он ведет себя как резистор с сопротивлением $R_d = \frac{U_{отк}}{I_{отк}}$

Тогда отношение мощности, выделяемой на диоде к мощности на резисторе равно

$$\frac{W_d}{W_R} = \frac{U_{отк}}{I_{отк}R} => W_R + W_d = W_d\frac{U_{отк} + I_{отк}R}{U_{отк}}$$

Разобьем процесс зарядки разрядки конденсатора на два этапа – напряжение на диоде меньше(больше) напряжения открытия.

Тогда

$$\varepsilon q_{11} = \frac{q_{11}^2}{2C_1} + W_R + W_d$$

Откуда

$$W_{d11} = \frac{C_1 U_{отк}^2(\varepsilon - \frac{U_{отк}}{2})}{U_{отк} + I_{отк}R}$$

Когда диод откроется:

$$\varepsilon q_{12} = \frac{C_1\varepsilon^2}{2} + \frac{C_1U_{отк}^2}{2} + W_R + W_d => W_{d12} = U_{отк}q_{12} = C_1\varepsilon U_{отк} - C_1U_{отк}^2$$

Перезарядка:

При перезарядке заряд распределится пропорционально емкостям конденсатора. Также разобьем процесс на два подпроцесса, считая, что для перехода необходимо, чтобы протек заряд

$$\Delta q = \frac{U_{отк}C_1C_2}{C_1+C_2}.$$

Тогда, по аналогии с первым случаем, запишем ЗСЭ для перезарядки

$$\frac{C_1\varepsilon^2}{2} = \frac{(q_{21}+\Delta q)^2}{2C_1} + \frac{(q_{22}-\Delta q)^2}{2C_2} + W_R + W_d$$

Откуда

$$W_{d21} = \frac{U_{отк}C_1C_2}{C_1+C_2}(\varepsilon - U_{отк})$$

И

$$\frac{(q_{21}+\Delta q)^2}{2C_1} + \frac{(q_{22}-\Delta q)^2}{2C_2} = \frac{(q_{21}+q_{22})^2}{2(C_1+C_2)} + W_d\frac{U_{отк}+I_{отк}R}{U_{отк}}$$

Откуда

$$W_{d22} = \frac{U_{отк}^2C_1C_2}{2(C_1+C_2)}\frac{U_{отк}}{U_{отк}+I_{отк}R}$$

Ответ мог быть представлен в виде

$$\frac{W_{d11}+W_{d12}}{W_{d21}+W_{d22}}$$

Критерий	**Соотношение**	**Балл**
Отношение мощностей на малых напряжениях на диоде	$W_d \dfrac{U_{\text{отк}} + I_{\text{отк}} R}{U_{\text{отк}}}$	1 балла
ЗСЭ для малых напряжений на диоде, случай 1	$\varepsilon q_{11} = \dfrac{q_{11}^2}{2C_1} + W_R + W_d$	1 балл
ЗСЭ для больших напряжений на диоде, случай 1	$\varepsilon q_{12} = \dfrac{C_1 \varepsilon^2}{2} + \dfrac{C_1 U_{\text{отк}}^2}{2} + W_R + W_d$	1 балл
ЗСЭ для малых напряжений на диоде, случай 2	$\dfrac{(q_{21} + \Delta q)^2}{2C_1} + \dfrac{(q_{22} - \Delta q)^2}{2C_2} = \dfrac{(q_{21} + q_{22})^2}{2(C_1 + C_2)} + W_d \dfrac{U_{\text{отк}} + I_{\text{отк}} R}{U_{\text{отк}}}$	1 балл
ЗСЭ для больших напряжений на диоде, случай 2	$\dfrac{C_1 \varepsilon^2}{2} = \dfrac{(q_{21} + \Delta q)^2}{2C_1} + \dfrac{(q_{22} - \Delta q)^2}{2C_2} + W_R + W_d$	1 балл
Нахождение каждой из мощностей		4 балла в сумме
Ответ		1 балл

4. Рассмотрим процесс с одноатомным идеальным газом, в котором объем газа $\boldsymbol{V}$ зависит от температуры $\boldsymbol{T}$ по закону $\boldsymbol{V = aT^b}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – некоторые константы. При каких значениях параметра $\boldsymbol{b}$ молярная теплоемкость газа в данном процессе отрицательна?

Возможное решение:

Работаем в дифференциалах. Все уравнения для упрощения пишем для одного моля газа, т.к. молярная теплоемкость не зависит от количества вещества. Обратим внимание, что нам не сказано, расширяется или сжимается газ. Значит, нужно рассматривать оба случая. Начинаем с первого начала термодинамики:

$$C\,dT \pm P\,dV = C_V\ dT$$

Знаку «+» соответствует сжатие газа (над газом совершают положительную работу внешние силы), знаку «-» соответствует расширение газа (газ совершает положительную работу). Преобразуем первое начало термодинамики и вычислим соответствующие производные исходя из уравнения, данного в условии задачи, а также уравнения Менделеева-Клайперона $PV = RT$:

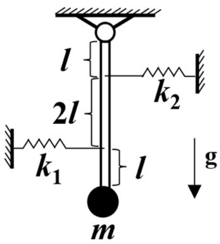
$$C = C_V \mp P\frac{dV}{dT} = C_V \mp \frac{RT}{V}\cdot abT^{b-1} = C_V \mp \frac{RT}{aT^b}\cdot abT^{b-1} = C_V \mp bR = \left(\frac{3}{2} \mp b\right)R$$

Для отрицательности молярной теплоемкости и при сжатии и при расширении нужно потребовать:

$$\frac{3}{2} + b < 0\ \Rightarrow b < -\frac{3}{2}$$

Критерий	**Соотношение**	**Балл**
Первое начало термодинамики:	$C\,dT \pm P\,dV = C_V\ dT$	3 балла
Уравнение Менделеева-Клайперона	$PV = RT$	2 балл
Преобразование к виду	$C_V \mp bR = \left(\frac{3}{2} \mp b\right)R$	3 балла
Ответ	$b < -\frac{3}{2}$	2 балла

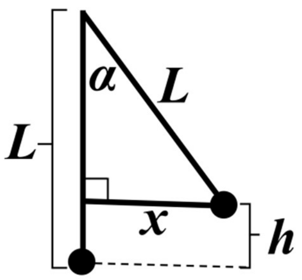
5. К потолку на невесомом шарнире прикреплена невесомая балка длиной $L = 4l$ (смотрите рисунок). На нижнем конце балки закреплен маленький шар массы m. Слева и справа к балке прикреплены изначально нерастянутые пружины с жесткостями $k_1 = k$, $k_2 = k/2$. Балка разделена на части l, $2l$, l так, как показано на рисунке. Другие концы пружин прикреплены к неподвижным стенкам. Найдите частоту малых колебаний такой системы в плоскости рисунка. Деформации пружин считать малыми. Трения в системе нет. Движение происходит в поле тяжести **g**, направленным вертикально вниз.



Примечание: для $x \ll 1$ справедливо: $(1-x)^n \approx 1 - nx$.

Возможное решение:

Рассмотрим малые колебания относительно шарнира. Отклоним нижний шар на малое расстояние x вдоль горизонтали. Рассмотрим геометрию задачи:



$$h = L(1-\cos\alpha) = L\left(1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}\right) = L\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{L}\right)^2}\right)$$

с учетом малости колебаний: $x \ll L$

Для малых x справедливо: $(1-x)^n \approx 1 - nx$

Тогда имеем:

$$h = L\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{L}\right)^2}\right) \approx L\left(1-1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{L}$$

При малых колебаниях шар поднимается на $\frac{1}{2}\frac{x^2}{L}$ относительно положения равновесия.

Запишем полную энергию системы:

$$\frac{1}{2}k_1\Delta x_1^2 + \frac{1}{2}k_2\Delta x_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mg\frac{x^2}{2L} = E$$

Отметим, что если шарик сместился по горизонтали на x, значит пружина k_1 деформировалась на 3/4 x, а пружина k_2 на 1/4 x. Последнее следует из подобия соответствующих треугольников.

Поскольку трения нет, то полная энергия сохраняется. Значит производная по времени от полной энергии равна нулю:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 kx\dot{x} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{k}{2}x\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} + mg\frac{x\dot{x}}{L} = 0$$

Откуда:

$$\frac{19}{32}kx + m\ddot{x} + \frac{mg}{L}x = 0$$

$$m\ddot{x} + \left(\frac{19}{32}k + \frac{mg}{L}\right)x = 0$$

Получено стандартное уравнение гармонических колебаний, откуда искомая частота:

$$\omega = \sqrt{\frac{19}{32}\frac{k}{m} + \frac{g}{L}}$$

Критерий	**Соотношение**	**Балл**
Применено малое приближение	$h = \frac{1}{2}\frac{x^2}{L}$	2 балла
Закон сохранения энергии	$\frac{1}{2}k_1\Delta x_1^2 + \frac{1}{2}k_2\Delta x_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mg\frac{x^2}{2L} = E$	3 балла
Взятие производной	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 kx\dot{x} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{k}{2}x\dot{x} + mx\ddot{x} + mg\frac{x\dot{x}}{L} = 0$	3 балла
Уравнение колебаний	$m\ddot{x} + \left(\frac{19}{32}k + \frac{mg}{L}\right)x = 0$	1 балл
Ответ	$\omega = \sqrt{\frac{19}{32}\frac{k}{m} + \frac{g}{L}}$	1 балл

Задача не считается решенной, если приводится только ответ!

Желаем успеха!